Jahresbericht

des

Königl. Gymnasiums

zu

Rastenburg,

Michaelis 1852,

womit

zu der öffentlichen Prüfung der Schüler,

so wie

zu den Declamationsübungen und der Abiturienten-Entlassung,

Freitag, den 1. October,

Vormittags von $8\frac{1}{2}$ und Nachmittags von $2\frac{1}{2}$ Uhr an,

ehrerbietigst einladet

der

Director **Techow.**

Inhalt: 1. Eine Abhandlung über Rectification und Quadratur der sphärischen Ellipse vom Gymnasiallehrer Jänsch.
2. Schulnachrichten vom Director.

Rastenburg, 1852.
Druck der Haberland'schen Officin.

Ueber Rectification und Quadratur der sphärischen Ellipse.

§. 1. Erklärung. Die sphärische Ellipse ist eine Linie auf der Kugel von solcher Beschaffenheit, daß die Summe der Entfernungen $PF + PF'$ eines jeden ihrer Punkte P von zwei gegebenen festen Punkten F und F', gemessen auf größten Kreisen eine constante Größe 2α ist. Die beiden Punkte F und F' heißen ihre Brennpunkte. Der durch diese beiden Punkte gelegte auf beiden Seiten von der Ellipse begränzte größte Kreis heißt die große Axe, der Halbirungspunkt derselben heißt der Mittelpunkt, und der im Mittelpunkt auf der großen Axe senkrechte, auf beiden Seiten von der Ellipse begränzte größte Kreis die kleine Axe der Ellipse.

§. 2. Aufgabe. Die Gleichung der sphärischen Ellipse aus ihrem Mittelpunkt in Bezug auf ihre beiden Axen zu finden.

Auflösung. Beschreibe ich von dem beliebigen P der sphärischen Ellipse 2 größte Kreise PQ und PQ' senkrecht gegen die beiden Axen, so ist MQ die Abzisse x, MQ' die Ordinale y des Punktes P; beschreibe ich ferner die größten Kreise PF und PF', so erhalte ich zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke PQF und PQF', in denen nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie ist,

$$1.\ \cos PF = \cos FQ \cos PQ,$$

$$\text{und } 2.\ \cos PF' = \cos F'Q \cos PQ,$$

$$\text{und } 3.\ \operatorname{ctg} PQ = \operatorname{tg} MQ' \cos MQ;$$

$$\text{oder } \cos PQ = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 MQ' \cos^2 MQ}}$$

Setze ich die kleine Axe $MB = \beta$, die Entfernung der beiden Brennpunkte $FF' = 2e$ so ist, da nach der Definition der sphärischen Ellipse $BF = \alpha$ ist,

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos e$$

$$\text{d. h. } \cos e = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

Da nun $MQ = x$
ist, so ist $FQ = e - x$
und $F'Q = e + x$;
ferner, da $PF + PF' = 2\alpha$
ist, so ist $PF' = 2\alpha - PF$

Substituire ich nun die für die einzelnen Bogen gefundenen Größen in die Gleichungen 1 und 2, so gehen sie über in folgende Gleichungen:

$$4.\ \cos PF = \frac{\cos(e - x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y \cos^2 x}}$$

$$5.\ \cos(2\alpha - PF) = \frac{\cos(e + x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y \cos^2 x}}$$

Eliminire ich endlich aus diesen beiden Gleichungen PF, so erhalte ich als Gleichung der sphärischen Ellipse:

$$\cos^2(e + x) + \cos^2(e - x) - 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos e^2 - \sin^2 x) = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2 y \cos^2 x)$$

oder, da $\cos e = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

ist;

$$\sin^2\alpha - \sin^2 x \sin^2\beta = \sin^2\alpha\cos^2\beta\,(1 + \operatorname{tg}^2 y \cos^2 x)$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2\beta} = 1$$

und dieses ist die einfachste Form der Gleichung der sphärischen Ellipse.

§. 3. Satz. Der Durchschnitt einer Kugel und eines Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, ist eine sphärische Ellipse.

Dem Beweise dieses Satzes ist es nöthig, den Beweis eines andern vorauszuschicken, nämlich:

Legt man durch die Spitze A eines Kegels und durch den Mittelpunkt N seines Grundkreises BDCE senkrecht gegen den Grundkreis eine Ebene ABC, halbirt man den Winkel BAC durch die Linie AF, legt man ferner durch F senkrecht gegen AF eine Ebene, so ist der Durchschnitt GJHK dieser Ebene und des Kegels eine solche Ellipse, deren Mittelpunkt F, deren eine Axe GH, deren andere Axe die Durchschnittslinie JK des Kreises und dieser Ebene ist.

Beweis. Da GH senkrecht auf AF steht und AF den Winkel BAC halbirt, so ist $GF = FH$, ferner ist $JF = FK$, da JK Sehne in dem Kreise BDCE ist und senkrecht auf dessen Durchmesser BC steht. Kann ich nun beweisen, daß jede in der Ebene des Schnitts GJHK der Linie JK parallel gezogene, von der Durchschnittskurve begränzte Linie durch CH halbirt wird, so ist der Satz bewiesen, da dieser Durchschnitt alsdann die Eigenschaft mit der Ellipse

gemein hat, daß jede von der Ellipse begränzte Linie, die ich parallel der einen Axe ziehe, von der andern Axe halbirt wird. Ziehe ich mir nun eine von diesen JK parallelen Linien J'K', und lege ich durch sie eine dem Grundkreise parallele Ebene, so wird diese Ebene den Kegel wieder in einem Kreise schneiden, in dem J'K' eine Sehne ist, die senkrecht auf seinem Durchmesser B'C' steht, also von diesem in F' halbirt wird. Es liegt aber sowohl B'C' als GH in der Ebene ABC, und beide schneiden sich im Punkte F', folglich wird J'K' durch GH halbirt. Es ist also der Durchschnitt eine Ellipse, deren eine Axe GH ist, da sie alle auf ihr senkrecht stehenden von der Curve begränzten Linien halbirt, deren andere Axe JK ist, da sie im Halbirungspunkt der ersten senkrecht steht, und deren Mittelpunkt F ist, da er Halbirungspunkt beider Axen ist.

Ich gehe jetzt zu dem Beweise des im Anfange dieses Paragraphen ausgesprochenen Satzes über.

Es sei A die Spitze des Kegels und BJCH die auf der Axe AF senkrecht stehende Ellipse, deren große Axe BC = 2a, deren kleine Axe JH = 2b ist; ferner seien FQ und FP die Coordinaten des Punktes E, so daß die Gleichung gilt:

$$\frac{EO^2}{a^2} + \frac{FP^2}{b^2} = 1.$$

Der Durchschnitt der um A beschriebenen Kugel und des Kegels sei BJ'CH', dessen Coordinatenaxen die größten Kreise BF'C und H'F'J' sein sollen, die ich erhalte, indem ich durch die beiden Axen der Ellipse und durch A Ebenen lege, die die Kugel schneiden. Ziehe ich nun durch E den Radius AE', so ist E' ein Punkt des Durchschnitts, und ich erhalte seine Coordinaten, indem ich von ihm größte Kreise senkrecht gegen BF'C und H'P'J' ziehe. Seine Abscisse x ist also F'Q', und seine Ordinate y ist F'P'. Da nun

$$FQ = AF \text{ tg } x$$
$$FP = AF \text{ tg } y$$

und da, wenn ich $F'B = \alpha$, $F'J' = \beta$, setze,

$$a = AF \text{ tg } \alpha$$
$$b = AF \text{ tg } \beta$$

ist, so wird, wenn ich diese Größen in die Gleichung der Ellipse substituire, die Gleichung des Durchschnitts:

$$\frac{\text{tg}^2 x}{\text{tg}^2 \alpha} + \frac{\text{tg}^2 y}{\text{tg}^2 \beta} = 1$$

sein, welche Gleichung mit der für die sphärische Ellipse oben aufgestellten Gleichung identisch ist; und hieraus folgt, daß der Durchschnitt einer Kugel und eines Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, eine sphärische Ellipse ist.

§. 4. Aufgabe. Die Gleichung des Kegels zu finden, bezogen auf seine 3 Hauptaxen. Seine 3 Hauptaxen sind nämlich die beiden Axen der Ellipse, deren Ebene senkrecht steht gegen die Halbirungslinie AF des Winkels BAC, und AF selbst.

Auflösung. Nehme ich einen beliebigen Punkt im Mantel des Kegels, ziehe ich durch

ihn von der Spitze des Kegels A eine Linie AM nach der Peripherie der Ellipse AHCJ, verbinde ich M und A mit dem Mittelpunkt F der Ellipse, und fälle ich von P die Perpendikel PL und PN, von N das Perpendikel NO, von M das Perpendikel MK, so sind

$$AL = z \quad FO = x \quad NO = y$$

die Coordinaten des Punktes P. Die Coordinaten des Punktes M in der Ellipse sind MK und FK und zwischen ihnen findet, wenn $FB = a$ $FJ = b$ ist, die Relation statt

$$\frac{FK^2}{a^2} + \frac{MK^2}{b^2} = 1.$$

Zwischen den Coordinaten des Punktes P und des Punktes M kann ich aber folgende Proportionen ansetzen:

$$z : AF = y : MK$$
$$z : AF = x : FK,$$

woraus folgt, wenn ich $AF = c$ setze, daß

$$MK = \frac{c\,y}{z}$$

$$FK = \frac{c\,x}{z}$$

ist. Wenn ich diese Werthe von MK und FK in die Gleichung der Ellipse substituire, so erhalte ich die Gleichung des Kegels, und sie wird alsdann

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

§. 5. Aufgabe. Die Gleichung der sphärischen Ellipse zu finden, ausgedrückt durch den Radius-Vector und den Winkel, den derselbe mit der x-Axe bildet.

Auflösung. Die Gleichung der sphärischen Ellipse, bezogen auf ihre beiden Axen $BC = 2\alpha$ und $JH = 2\beta$ war:

$$\frac{tg^2 x}{tg^2 \alpha} + \frac{tg^2 y}{tg^2 \beta} = 1;$$

wo für den Punkt P, $FQ = x$, $FO' = y$ ist. Der Radius-Vector des Punktes P ist $FP = \varphi$, der mit der x-Axe FC den Winkel $PFC = \psi$ bildet. Nun ist aber

$tg x = tg \varphi \cos \psi$, $tg y = tg \varphi \sin \psi$;

es geht daher durch Substitution dieser Werthe für x und y die obige Gleichung in folgende über:

$$tg^2 \varphi \left\{ \frac{\cos^2 \psi}{tg^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \psi}{tg^2 \beta} \right\} = 1;$$

nnd dieses ist die gesuchte Gleichung.

§. 6. Zusatz. Dieselbe Form hat die Gleichung des Kegels, wenn ich sie ausdrücke durch den Winkel φ, den die Seite N des Kegels mit dem von der Spitze auf den Mittelpunkt der Grund-Ellipse gefällten Perpendikel bildet, und den Winkel ψ, den die Projection von r in der x y Ebene mit der x-Axe bildet.

Es wird dann nämlich:

$$z = r \cos\varphi \quad y = r \sin\varphi \sin\psi \quad x = r \sin\varphi \cos\psi$$

und, wenn ich mit α und β die Hälfte der Winkel bezeichne, die ich an der Spitze erhalte, wenn ich durch die Spitze des Kegels und die Axen der Ellipse 2 Ebenen lege,

$$a = c\ \mathrm{tg}\alpha \quad b = c\ \mathrm{tg}\beta.$$

Durch Substitution dieser Größen für xyz a und b in die Gleichung des Kegels

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

erhalte ich:

$$\frac{r^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi}{c^2\ \mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{r^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi}{c^2\ \mathrm{tg}^2\beta} = \frac{r^2 \cos^2\varphi}{c^2}$$

oder

$$\mathrm{tg}^2\varphi \left\{ \frac{\cos^2\psi}{\mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{\sin^2\psi}{\mathrm{tg}^2\beta} \right\} = 1;$$

welche Gleichung mit der für die sphärischen Ellipse übereinstimmt.

Ich werde hier der weitern Verfolgung des vorgelegten Thema's einen Satz über elliptischen Integrale vorausschicken, den ich später unten brauche.

§. 7. Satz. Jedes von o bis $\frac{\pi}{2}$ genommene elliptische Integral dritter Gattung läßt sich auf elliptische Funktionen erster und zweiter Gattung zurückführen.

Beweis. Unter einem elliptischen Integral dritter Gattung versteht man ein Integral von der Form:

$$\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - c^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}};$$

wo man α den Parameter, c den Modul und φ die Amplitude des Integrals nennt. Die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung haben die Form:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}} \quad \text{und} \quad \int d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}$$

Setzt man

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}} = u$$

so ist φ die Amplitude von u, was so bezeichnet wird:

$$\varphi = \mathrm{am}\ u;$$

ferner wird noch

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}} \text{ mit } F(c\,\varphi); \int d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi} \text{ mit } E(c\,\varphi)$$

bezeichnet.

Nach bekannten Formeln ist nun, wenn

$$\varphi = \operatorname{am} u \quad \psi = \operatorname{am} v$$

ist

$$\sin \operatorname{am} (u + v) = \frac{\sin \varphi \cos \psi \triangle \psi + \sin \psi \cos \varphi \triangle \varphi}{1 - c^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}$$

wo $\triangle \varphi = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}$

$\triangle \psi = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi}$

ist. Wenn man

$$\operatorname{am} (u + v) \text{ mit } \sigma \quad \operatorname{am} (u + v) \text{ mit } \delta$$

bezeichnet, so kann man für obige Formeln auch setzen

$$F (c \varphi) + F (c \psi) = F (c \sigma)$$
$$F (c \varphi) - F (c \psi) = F (c \delta)$$

und hieraus läßt sich wieder leicht ableiten:

$$E (c \varphi) + E (c \psi) = E (c \sigma) + c^2 \sin \varphi \sin \psi \sin \delta$$
$$E (c \varphi) - E (c \psi) = E (c \delta) - c^2 \sin \varphi \sin \psi \sin \delta.$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen von einander, so erhält man

$$2 E (c \psi) - E (c \sigma) + E (c \delta) = c^2 \sin \varphi \sin \psi (\sin \sigma + \sin \delta);$$

oder durch Substitution der Werthe von $\sin \sigma$ und $\sin \delta$

$$2 E (c \psi) - E (c \sigma) + E (c \delta) = \frac{2 c^2 \sin \psi \cos \psi \triangle \psi \sin^2 \varphi}{1 - c^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi.}$$

Setzt man nun ψ, da es unabhängig von φ ist, constant gleich α, multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{d \varphi}{\triangle \varphi}$ und integrirt man, so kommt man zu folgender Gleichung:

$$\int \left\{ 2 E (c \alpha) - E (c \sigma) + E (c \delta) \right\} \frac{d \varphi}{\triangle \varphi} = \int \frac{2 c^2 \sin \alpha \cos \alpha \triangle \alpha \sin^2 \varphi \, d \varphi}{(1 - c^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi) \triangle \varphi.}$$

Das Integral rechts ist ein elliptisches Integral dritter Gattung, es kommt also auf die Bestimmung des Integrals links an. Der erste Theil desselben

$$\int 2 E (c \alpha) \frac{d \varphi}{\triangle \varphi}$$

läßt sich leicht integriren, da α unabhängig von φ ist und ergiebt

$$2 E (c \alpha) F (c \varphi.)$$

Es bleibt jetzt noch zu bestimmen;

$$\int_0^\varphi \left\{ E (c \sigma) - E (c \delta) \right\} \frac{d \varphi}{\triangle \varphi.}$$

Da $\sigma = \varphi + \alpha$, $\delta = \varphi - \alpha$ war, so wird

für $\varphi = 0 \quad \sigma = \alpha \quad \delta = -\alpha$

und für $\varphi = \varphi \quad \sigma = \sigma \quad \delta = \delta$

und man kann, wenn man diese Grenzen im Auge behält $\frac{d\varphi}{\triangle\varphi} = \frac{d\sigma}{\triangle\sigma} = \frac{d\delta}{\triangle\delta}$ setzen, wonach, da $E(-\varphi) = E\varphi$ ist

$$\int_0^\varphi \frac{E\sigma\, d\varphi}{\triangle\varphi} = \int_\alpha^\sigma \frac{E\sigma\, d\sigma}{\triangle\sigma} = \int_0^\sigma \frac{E\sigma\, d\sigma}{\triangle\sigma} - \int_0^\alpha \frac{E\sigma\, d\sigma}{\triangle\sigma}$$

$$\text{und} \int_0^\varphi \frac{E\delta\, d\varphi}{\triangle\varphi} = \int_{-\alpha}^\delta \frac{E\delta\, d\delta}{\triangle\delta} = \int_0^\delta \frac{E\delta\, d\delta}{\triangle\delta} - \int_0^\alpha \frac{E\delta\, d\delta}{\triangle\delta}$$

wird, aus welchen beiden Gleichungen folgt:

$$\int_0^\varphi \frac{(E\sigma - E\delta)}{\triangle\varphi} d\varphi = \int_0^\sigma \frac{E\varphi\, d\varphi}{\triangle\varphi} - \int_0^\delta \frac{E\varphi\, d\varphi}{\triangle\varphi}.$$

Es wird also das elliptische Integral dritter Gattung

$$\int_0^\varphi \frac{2\, c^2 \sin\alpha \cos\alpha \triangle\alpha \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - c^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi) \triangle\varphi} = 2\, E\alpha\, F\varphi - \int_\delta^\sigma \frac{E\varphi\, d\varphi}{\triangle\varphi}.$$

Vertauscht man φ mit α, so erhält man den Werth eines andern elliptischen Integrals dritter Gattung, nämlich:

$$\int_0^\varphi \frac{2\, c^2 \sin\alpha \cos\alpha \triangle\alpha \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi) \triangle\varphi} - \int_0^\alpha \frac{2\, c^2 \sin\varphi \cos\varphi \triangle\varphi \sin^2\alpha\, d\alpha}{(1 - c^2 \sin^2\varphi \sin^2\alpha) \triangle\alpha}$$
$$= 2\, E\varphi\, F\alpha - 2\, E\alpha\, F\varphi.$$

Die Subtraction beider giebt nun:

$$\int_0^\varphi \frac{2\, c^2 \sin\alpha \cos\alpha \triangle\alpha \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - c^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi) \triangle\varphi} - \int_0^\alpha \frac{2\, c^2 \sin\varphi \cos\varphi \triangle\varphi \sin^2\alpha\, d\alpha}{(1 - c^2 \sin^2\varphi \sin^2\alpha) \triangle\alpha}$$
$$= 2\, E\varphi\, F\alpha - 2\, E\alpha\, F\varphi.$$

Ist φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen, für welchen Fall man

$$F\left(c\, \frac{\pi}{2}\right) \text{ mit } F^{\mathrm{I}}_c$$

$$E\left(c\, \frac{\pi}{2}\right) \text{ mit } E^{\mathrm{I}}_c$$

bezeichnet, so verschwindet das 2te Integral, da es den Factor $\sin\varphi \cos\varphi$ enthält, und man erhält als Endresultat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2 \sin\alpha \cos\alpha \triangle\alpha \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - c^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi) \triangle\varphi} = E^{\mathrm{I}}\, F\alpha - F^{\mathrm{I}}\, E\alpha$$

wodurch das complette Integral dritter Gattung durch Functionen erster und zweiter Gattung ausgedrückt ist.

§. 8. Aufgabe. Die sphärische Ellipse zu rectificiren.

Auflösung. Die sphärische Ellipse sei BECD, das Element derselben sei $GJ = ds$ FG und FJ seien zwei auf einanderfolgende Radien-Vectoren.

$$FG = \varphi \qquad FJ = \varphi + d\,\varphi;$$

ferner sei Winkel $GFJ = d\,\psi,$

also: $GH = \sin\varphi\, d\,\psi,$

da ich nun das rechtwinklige sphärische Dreieck GHJ wegen der unendlich kleinen Größe seiner Seiten als ein ebenes Dreieck betrachten kann, so wird

$$d\,s^2 = d\,\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\,\psi^2$$

oder

$$d\,s = d\,\psi\, \sqrt{\left(\frac{d\,\varphi}{d\,\psi}\right)^2 + \sin^2\varphi}$$

und

$$DC = s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\,\psi\, \sqrt{\left(\frac{d\,\varphi}{d\,\psi}\right)^2 + \sin^2\varphi}$$

Die Gleichung der sphärischen Ellipse bezogen auf den Bogen φ und den Winkel ψ war, wie oben aufgestellt ist:

$$\mathrm{tg}^2\varphi \left\{ \frac{\cos^2\psi}{\mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{\sin^2\varphi}{\mathrm{tg}^2\beta} \right\} = 1;$$

aus welcher Gleichung folgt:

$$\sin^2\varphi = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\beta}{\mathrm{tg}^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\beta\cos^2\psi + \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\psi}$$

$$\text{und } \left(\frac{d\,\varphi}{d\,\psi}\right)^2 = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\beta\,(\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta)^2 \sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\{\mathrm{tg}^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\beta\cos^2\varphi + \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\varphi\}^2 \cdot \{\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\varphi + \mathrm{tg}^2\beta\cos^2\varphi\}}$$

also:

$$\left(\frac{d\,\varphi}{d\,\psi}\right)^2 + \sin^2\varphi = \left\{ \frac{\mathrm{tg}^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\beta\,\{\mathrm{tg}^4\alpha\,(1 + \mathrm{tg}^2\beta)\sin^2\varphi + \mathrm{tg}^4\beta\,(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\varphi\}}{\mathrm{tg}^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\beta\cos^2\varphi + \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\varphi \cdot \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\varphi + \mathrm{tg}^2\beta\cos^2\varphi.} \right\}$$

Um diesem Integral die Form des elliptischen Integrals dritter Gattung zu geben, werde ich folgende Substitution anwenden:

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha}\,\mathrm{ctg}\,\xi;$$

deren geometrische Deutung folgende ist:

Ist A die Spitze des Kegels, B′H′CJ′ der Grundkreis, BHCJ die auf AF senkrecht stehende Ellipse, so ist KFB der oben betrachtete Winkel ψ. Setze ich den Neigungswinkel des Kreises und der Ellipse MHK $= \gamma$, ferner den in der Kreisebene dem Winkel KFA in der Ellipsenebene correspondirenden Winkel MFH $= 90 - \xi$, so daß also B′FM $= \xi$ ist, so ist nach einem Satze der sphärischen Trigonometrie

$$\mathrm{tg}\,\psi = \cos\gamma\ \mathrm{ctg}\,\xi.$$

Der Cosinus des Neigungswinkel des Grundkreises eines Kegels und der Ellipse, die senkrecht steht gegen die Halbirungslinie AF des Winkels B′AC′ des Axendreiecks, ist aber nach bekannten Sätzen $= \frac{\mathrm{tg\ BAF}}{\mathrm{tg\ JAF}}$,
wenn JF die große, BF die kleine Axe der Ellipse ist. Es ist nun nach unserer Bezeichnung Winkel JAF $= \alpha$, Winkel BAF $= \beta$
also

$$\mathrm{tg}\ \psi = \frac{\mathrm{tg}\ \beta}{\mathrm{tg}\ \alpha}\ \mathrm{ctg}\ \xi$$

und ξ ist demnach das Complement des Winkels in der Kreisebene, der dem Winkel in der Ebene der Ellipse correspondirt, so daß dem Winkel $\psi = 0$ der Winkel $\xi = \frac{\pi}{2}$ entspricht, und dem Winkel $\psi = \frac{\pi}{2}$ der Winkel $\xi = 0$. Gemäß dieser Substitution ist nun

$$d\ \psi = -\frac{\mathrm{tg}\ \alpha\ \mathrm{tg}\ \beta\ d\ \xi}{\mathrm{tg}^2\alpha\ \sin^2\xi + \mathrm{tg}^2\beta\ \cos^2\xi}$$

$$\cos^2\psi = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha\ \sin^2\xi}{\mathrm{tg}^2\alpha\ \sin^2\xi + \mathrm{tg}^2\beta\ \cos^2\xi}$$

$$\sin^2\psi = \frac{\mathrm{tg}^2\beta\ \cos^2\xi}{\mathrm{tg}^2\alpha\ \sin^2\xi + \mathrm{tg}^2\beta\ \cos^2\xi}$$

und substituire ich diese Werthe in obiges Integral, so wird

$$s = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\ \xi \sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\alpha\ \cos^2\xi + \mathrm{tg}^2\beta\ \sin^2\xi}}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha\ \sin^2\xi + \mathrm{tg}^2\beta\ \cos^2\xi};$$

oder indem ich Zeichen und Grenzen umkehre und für ξ wieder ψ setze

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\ \psi \sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\alpha\ \cos^2\psi + \mathrm{tg}^2\beta\ \sin^2\psi}}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha\ \sin^2\psi + \mathrm{tg}^2\beta\ \cos^2\psi}$$

oder

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}\ \alpha\ d\ \psi \sqrt{1 - \frac{\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta}{\mathrm{tg}\ \alpha\,(1 + \mathrm{tg}^2\beta)}\ \sin^2\psi}}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\beta}\left\{1 + \frac{\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta}{1 + \mathrm{tg}^2\beta}\ \sin^2\psi\right\}}$$

oder, wenn ich $\cos e' = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ setze,

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}\ \alpha\ \cos \beta\ d\ \psi \sqrt{1 - \sin^2 e'\ \sin^2\psi}}{1 + \sin^2 e'\ \mathrm{tg}^2\alpha\ \sin^2\psi}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}\ \alpha\ \cos \beta\ d\ \psi\ (1 - \sin^2 e'\ \sin^2\psi)}{(1 + \sin^2 e'\ \mathrm{tg}^2\alpha\ \sin^2\psi) \sqrt{1 - \sin^2 e'\ \sin^2\psi}}.$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \cos\beta\, d\psi}{\sqrt{1-\sin^2 e' \sin^2\psi}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 e' \,\mathrm{tg}\,\alpha \cos\beta}{\cos^2\alpha\,(1+\sin^2 e'\,\mathrm{tg}^2\alpha \sin^2\psi)} \frac{d\psi \sin^2\psi}{\sqrt{1-\sin^2 e' \sin^2\psi}}$$

$$= \mathrm{tg}\; a \cos\beta\; F^{\mathrm{I}} \sin e' - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 e'\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta\; d\psi \sin^2\psi}{\cos^2\alpha\;(1+\sin^2 e'\;\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\psi)\sqrt{1-\sin^2 e'\sin^2\psi}}.$$

Um die Form des hier vorkommenden Integrals ganz übereinstimmend zu machen mit der früher besprochenen, werde ich

$$\mathrm{tg}^2\alpha = -\sin^2\gamma$$

setzen, wo also γ eine imaginäre Größe ist, dann wird das Integral werden:

$$= \frac{1}{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 e' \sin\gamma\cos\gamma \triangle\gamma \sin^2\psi\; d\psi}{(1-\sin^2 e' \sin^2\gamma\sin^2\psi)\sqrt{1-\sin^2 e'\sin\psi}},$$

da

$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\gamma\cos\gamma\triangle\gamma}{i} \text{ ist.}$$

Dieses Integral ist nun nach dem oben bewiesenen Satze

$$= \frac{1}{i}(E^{\mathrm{I}}\, F\gamma - F^{\mathrm{I}}\, E\gamma),$$

und es bleibt jetzt noch die Bestimmung der Functionen $F\gamma$ und $E\gamma$ übrig, in denen γ imaginär ist, oder die Zurückführung dieser Functionen auf Functionen mit reeller Amplitude.

Da $-\sin^2\gamma = +\mathrm{tg}^2\alpha$ war, so wird

$$E\gamma = \int \frac{d\alpha}{i\cos\alpha}\sqrt{1+\sin^2 e'\,\mathrm{tg}^2\alpha.} = \int\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2 e'\sin^2\alpha}$$

und durch theilweise Integration

$$= \frac{1}{i}\left\{\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{1-\cos^2 e'\sin^2\alpha} + F(\cos e'\,\alpha) - E(\cos e',\alpha)\right\}$$

ferner:

$$F\gamma = \frac{1}{i}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{1+\sin^2 e'\,\mathrm{tg}^2\alpha}\;\cos\alpha} = \frac{1}{i}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\cos^2 e'\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{1}{i}F(\cos e',\alpha).$$

Also wird:

$$E^{\mathrm{I}}\sin e'\,F\gamma - F^{\mathrm{I}}\sin e'\,E\gamma = \frac{1}{i}\Big\{E^{\mathrm{I}}\sin e'\,F(\cos e'\,\alpha)$$
$$- F^{\mathrm{I}}\sin e'\,(\mathrm{tg}\,\alpha)\sqrt{1-\cos^2 e'\sin^2\alpha}$$
$$+ F(\cos e'\,\alpha) - E(\cos e',\alpha)\Big\}$$

und $\frac{E^I \sin e' F \gamma - F^I \sin e' E \gamma}{i} = \text{tg}\, \alpha \sqrt{1 - \cos^2 e' \sin^2 \alpha} \quad F^I \sin^2 e'$

$- (E^I \sin e' - F^I \sin e') F (\cos e', \alpha) - F^I \sin e' E (\cos e', \alpha).$

Substituire ich diesen Werth des Integrals in den Ausdruck für s, da er jetzt auf reelle Größen zurückgeführt ist, so wird:

$$s = \left\{ E^I \sin e' - F^I \sin e' \right\} F (\cos e' \alpha) + F^I \sin e' E (\cos e' \alpha).$$

Um den Umfang der ganzen sphärischen Ellipse zu erhalten muß ich diesen Ausdruck noch mit 4 multipliciren, also wird:

$$S = 4 \left\{ E^I \sin e' - F^I \sin e' \right\} F (\cos e' \alpha) + 4 F^I \sin e' E (\cos e' \alpha).$$

Die Bedeutung von e' behalte ich mir noch vor, bis ich den Ausdruck für die Quadratur dargestellt habe, und ich werde hier noch, um eine für die elliptischen Functionen sehr wichtige Formel zu entwickeln, einen speziellen Fall betrachten.

§. 9. Allgemeine Betrachtung. Für den Fall, daß die große Axe der sphärischen Ellipse π wird, also $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist, geht die sphärische Ellipse in einen größten Kreis über, es wird also das vorhin mit e bezeichnete Stück oder der 4. Theil desselben $\frac{\pi}{2}$ sein. Der Werth für s war:

$$\left\{ E^I \sin e' - F^I \sin e' \right\} (F \cos e' \alpha) + F^I \sin e' E (\cos e' \alpha);$$

welcher Ausdruck sich für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ umändert in folgenden:

$$\left\{ E^I \sin e' - F^I \sin e' \right\} F^I \cos e' + F^I \sin e' E^I \cos e'.$$

Ich erhalte demnach:

$$\frac{\pi}{2} = E^I \sin e' F^I \cos e' + F^I \sin e, E^I \cos e' - F^I \sin e' F^I \cos e'$$

welche Formel für jedes e' gilt, da e' durch die Gleichung bestimmt war, $\cos e' = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$; jetzt also $\cos e' = \sin \beta$ ist, und β jeden Werth annehmen kann in dem hier betrachteten Fall, denn, damit die sphärische Ellipse ein größter Kreis werde, ist nur nöthig, daß $\alpha = 90$ wird.

§. 10. Aufgabe. Die sphärische Ellipse zu quadriren.

Aufgabe. Der Ausdruck für das Element der Oberfläche eines Körpers ist immer

$$d f^2 = d x^2 d y^2 + d x^2 d z^2 + d y^2 d z^2$$

oder $$d f = d x d y \sqrt{1 + \left(\frac{d z}{d x}\right)^2 + \left(\frac{d z}{d y}\right)^2}.$$

Da die Gleichung der Kugel bezogen auf 3 auf einander rechtwinklige Coordinatenaxen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ist, so wird:

$$\frac{d z}{d x} = -\frac{x}{z} \quad \frac{d z}{d y} = -\frac{y}{z};$$

folglich $df = dx\,dy\sqrt{1 + \frac{y^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2}}$

$$= \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

und

$$f = \int \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Zur Bestimmung dieses Integrals für die sphärische Ellipse ist es nöthig deren Projection in der $x\,y$ Ebene zu betrachten. Da ich nun bewiesen habe, daß die spärische Ellipse der Durchschnitt einer Kugel und eines Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, ist, so ist es nur nöthig aus der Gleichung der Kugel und der des Kegels z zu eliminiren um die Gleichung der Projection zu finden. Die Gleichung des Kegels auf seine drei Hauptaxen bezogen ist, wie oben gezeigt,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

und die Gleichung der Kugel, bezogen auf dasselbe Coordinatensystem, ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ich habe hier der Bequemlichkeit wegen den Radius der Kugel gleich 1 gesetzt, und ich werde aus demselben Grunde auch $c = 1$ setzen, was ich ohne die Aufgabe zu beschränken immer thun kann, da $a\ b\ c$ das Verhältniß der drei Axen ausdrücken, also daran nichts geändert wird, wenn ich nun statt $a, \frac{a}{c}$ für $b, \frac{b}{c}$ setze; für $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ werde ich aber wieder a und b setzen.

Eliminire ich nun aus diesen beiden Gleichungen z, so erhalte ich als Gleichung der Projection:

$$x^2\,\frac{1 + a^2}{a^2} + y^2\,\frac{1 + b^2}{b^2} = 1.$$

Die Projection ist also eine Ellipse, deren große Axe $= \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$, deren kleine Axe $= \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$ ist. Es wäre daher obiger Ausdruck nach y zu integriren, in den so gefundenen Ausdruck den Werth von y aus dieser Gleichung zu substituiren und dann nach x von o bis $\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$ zu integriren. Da jedoch dieser Weg auf kein befriedigendes Resultat führen dürfte, so werde ich eine Transformation des Coordinatensystems bewerkstelligen, die der Natur der Projection angemessen ist.

Das oben aufgestellte Integral ist die Grenze einer Summe von Rechtecken, deren

Seiten d x und d y sind, jedes multiplicirt mit $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$. Für diese Rechtecke werde ich mir andere Vierecke bilden.

Denke ich mir um den Mittelpunkt F der Ellipse BECD, die die Projection der sphärischen Ellipse ist und deren Gleichung

$$x^2 \frac{1 + a^2}{a^2} + y^2 \frac{1 + b^2}{b^2} = 1$$

war, eine Ellipse JKGH und eine Hyperbel mit den Axen

$$FH = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{1 + b^2}} \text{ und } FG = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{1 + a^2}}$$

beschrieben, deren Gleichungen also sind:

$$x^2 \frac{1 + a^2}{a^2 - b^2} + y^2 \frac{1 + b^2}{a^2 - b^2} = 1$$

$$\text{und } x^2 \frac{1 + a^2}{a^2 - b^2} - y^2 \frac{1 + b^2}{a^2 - b^2} = 1$$

so wird, wenn ich in der Hyperbel $x^2 = \frac{a^2}{1 + a^2}$ d. h. α gleich der großen Axe der Ellipse BECD setze, $y^2 = \frac{b^2}{1 + b^2}$, d. h. gleich der kleinen Axe derselben Ellipse. Ich werde jetzt dem x der Hyperbel alle Werthe beilegen von $x = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{1 + a^2}}$ bis $x = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{1 + a^2}}$ und mit diesen Werthen von x und den ihnen entsprechenden Werthen von y als Axen-Ellipsen um den Mittelpunkt F beschreiben; die erste von diesen für $x = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{1 + a^2}}$ und $y = o$ wird mit der Axe FG zusammenfallen, die letzte jedoch für $x = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$ und $y = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$ fällt mit der Ellipse BECD zusammen. Thue ich dasselbe mit den Coordinaten der Ellipse d. h. beschreibe ich mit den Coordinaten der Ellipse JKCH als Axen-Hyperbeln, so fällt die erste derselben für $x = o$ und $y = \sqrt{\frac{a + b^2}{1 + b^2}}$ mit der Axe FH zusammen, die zweite wird sein ein G′D′, die dann folgende G″D″ u. s. w. bis die letzte für $x = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$ und $y = o$ mit der Axe FG zusammenfallen wird. Ich erhalte auf diese Weise für die Ellipse ein Netz, das aus Vierecken $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ besteht, deren jedes von zwei Ellipsen und zwei Hyperbelbogen begränzt wird. Die Summe aller dieser Vierecke, jedes

multiplicirt mit dem ihm zukommenden Werthe von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ wird mir den Inhalt der sphärischen Ellipse geben.

Wie man den Inhalt eines solchen Viereckes bestimmt, das von Curven begränzt wird, deren Parameter von x und y durch bestimmte Gleichungen abhängen, ist bekannt. Es ist daher jetzt nur nothwendig diese Gleichungen aufzusuchen, durch die diese Parameter von x und y abhängen.

Da die Gleichung der Hilfshyperbel nun

$$x^2 \frac{1+\alpha^2}{a^2+b^2} - y^2 \frac{1+b^2}{a^2-b^2} = 1$$

war, und ich ihr genüge, wenn ich

$$y = \cos\varphi$$
$$x^2 = 1 - \frac{1+b^2}{1+a^2} \sin^2\varphi$$

setze, wo φ der Winkel ist, den der Radius-Vector FP mit der Ordinate PO des Punktes P macht, so werden die jedesmaligen Axen für die Ellipsen des Systems sein:

$$\sqrt{1 - \frac{1+b^2}{1+a^2} \sin^2\varphi} \text{ und } \cos\varphi;$$

und die Gleichung dieses Systems von Ellipsen wird werden:

$$\frac{x^2}{1 - \frac{1+b^2}{1+a^2} \sin^2\varphi} + \frac{y^2}{\cos^2\varphi} = 1.$$

Es ist hier noch zu bemerken, daß der Werth von φ, der der Ordinate $y = 0$ entspricht, $\frac{\pi}{2}$ ist, und der der Ordinate $y = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$ entspricht; arc: $\left\{\cos = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right\}$ ist, und ich konnte auch nur darum $y = \cos\varphi$ setzen, weil y immer kleiner als der Kugelradius, also kleiner als 1 sein muß. Dieser zuletzt aufgestellten Gleichung für das System von Ellipsen genüge ich nun wieder, wenn ich

$$x^2 = \left\{1 - \frac{1+b^2}{1+a^2} \sin^2\varphi\right\} \sin^2\psi$$
$$y^2 = \cos^2\varphi \cos^2\psi$$

setze, und dieses sind die gesuchten Gleichungen zwischen x, y und den neuen Variabeln. Den Winkel ψ bestimme ich auf folgende Weise. Ich schlage von F aus mit den beiden Halbaxen $\sqrt{1 - \frac{1+b^2}{1+a^2} \sin^2\varphi}$ und $\cos\varphi$ zwei Kreise ACBD u. A′C′B′D′, ziehe im größern Kreise den Radius FM, fälle von M das Perpendikel MQ und von N, wo Radius FM den kleinern Kreis schneidet, das Perpendikel NR, verlängere dieses Perpendikel bis es MQ in P schneidet,

so ist P ein Punkt der Ellipse, deren Halbaxen $\sqrt{1-\frac{1+b^2}{1+a^2}\sin^2\varphi}$ und $\cos\varphi$ sind. Ist nun Winkel $D'FN = \psi$, so wird FR d. h. $y = FN \cos\psi = \cos\varphi\cos\psi$ und FQ d. h. $x = FM \sin\psi = \sqrt{1-\frac{1+b^2}{1+a^2}\sin^2\varphi}\,\sin\psi$, und dieser Winkel ψ wächst für jede Ellipse des Systems von $\frac{\pi}{2}$ bis o.

Nachdem ich nun die geometrische Deutung der gemachten Substitution gegeben habe, werde ich sie wirklich ausführen. Der Ausdruck für den Inhalt der sphärischen Ellipse ausgedrückt in x und y war:

$$f = \iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Nach einem bekannten Satze ist aber, wenn ich $x = f(\varphi\ \psi)$ $y = p(\varphi\ \psi)$ setze:

$$\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \iint \frac{d\varphi\,d\psi\left\{\frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\psi}-\frac{dx}{d\psi}\frac{dy}{d\varphi}\right\}}{\sqrt{1-(f(\varphi\ \psi))^2-(p(\varphi\ \psi))^2}}.$$

Da nun

$$x^2 = \left\{1-\frac{1+b^2}{1+a^2}\sin^2\varphi\right\}\sin^2\psi \quad y = \cos\varphi\cos\psi$$

gesetzt werden soll, so wird:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{\frac{1+b^2}{1+a^2}\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi}{\sqrt{1-\frac{1+b^2}{1+a^2}\sin^2\varphi}}$$

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{\left\{1-\frac{1+b^2}{1+a^2}\sin^2\varphi\right\}\cos\psi}{\sqrt{1-\frac{1+b^2}{1+a^2}\sin^2\varphi}}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\sin\varphi\cos\psi$$

$$\frac{dy}{d\psi} = -\cos\varphi\sin\psi.$$

Führe ich diese Substitution für das Integral

$$\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

aus, so erhalte ich:

$$\iint \frac{d\varphi\, d\psi \left\{1 - \frac{1+b^2}{1+a^2}\sin^2\varphi - \frac{a^2-b^2}{1+a^2}\sin^2\psi\right\}}{\sqrt{1-\frac{1+b^2}{1+a^2}\sin^2\varphi}\ \sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{1+a^2}\sin^2\psi}}.$$

Setze ich nun endlich wie oben

$$a = \operatorname{tg}\alpha$$
$$b = \operatorname{tg}\beta$$

und berücksichtige, daß $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \cos e$, wo e die Excentricität der sphärischen Ellipse ist, war, so erhalte ich

$$\iint \frac{d\varphi\, d\psi \left\{1 - \cos^2 e \sin^2\varphi - \sin^2 e \sin^2\psi\right\}}{\sqrt{1-\cos^2 e \sin^2\varphi}\ \sqrt{1-\sin^2 e \sin^2\psi}}.$$

Die Grenzen für ψ waren $\frac{\pi}{2}$ und o, für φ $\frac{\pi}{2}$ und arc cos $= \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$ oder da $b = \operatorname{tg}\beta$ ist, arc cos $= \sin\beta$ d. h. $\frac{\pi}{2} - \beta$.

Um die Integration dieses Doppelintegrals auszuführen, werde ich den Zähler so schreiben:

$$1 - \cos^2 e \sin^2\varphi + 1 - \sin^2 e \sin^2\psi - 1,$$

alsdann kann ich dieses Integral in drei andere zerlegen, nämlich:

$$\iint \frac{d\varphi\, d\psi \sqrt{1-\cos^2 e \sin^2\varphi}}{\sqrt{1-\sin^2 e \sin^2\psi}} + \iint \frac{d\varphi\, d\psi \sqrt{1-\sin^2 e \sin^2\psi}}{\sqrt{1-\cos^2 e \sin^2\varphi}}$$

$$\iint \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{1-\cos^2 e \sin^2\varphi}\ \sqrt{1-\sin^2 e \sin^2\psi}}.$$

Führe ich jetzt die Integration aus, was ich sehr leicht mit Hilfe der elliptischen Functionen thun kann, da die Variabeln getrennt sind, und nehme diese Integrale zwischen den festgesetzten Grenzen, so erhalte ich:

$$F^1 \sin e \left\{E^1 \cos e - E\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right)\right\}$$

$$+ E^1 \sin e \left\{F^1 \cos e - F\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right)\right\} - F^1 \sin e \left\{F^1 \cos e - F\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right)\right\} \text{ oder:}$$

$$F^1 \sin e\, E^1 \cos e + E^1 \sin e\, F^1 \cos e - F^1 \sin e\, F^1 \cos e.$$
$$+ (F^1 \sin e - E^1 \sin e)\, F\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right) - F^1 \sin e\, E\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Da nun, wie früher gezeigt ist:

$F^1 \sin e\, E^1 \cos e + E^1 \sin e\, F^1 \cos e - F^1 \sin e\, F^1 \cos e = \frac{\pi}{2}$ ist, so wird der vierte Theil des Inhalts der sphärischen Ellipse $f = \frac{\pi}{2} - (E^1 \sin e\, F^1 \sin\ e)\, F\left(\cos e\ \frac{\pi}{2} - \beta\right) - F^1 \sin e,\ E\left(\cos e, -\frac{\pi}{2}\ \beta\right)$.

Fig I.

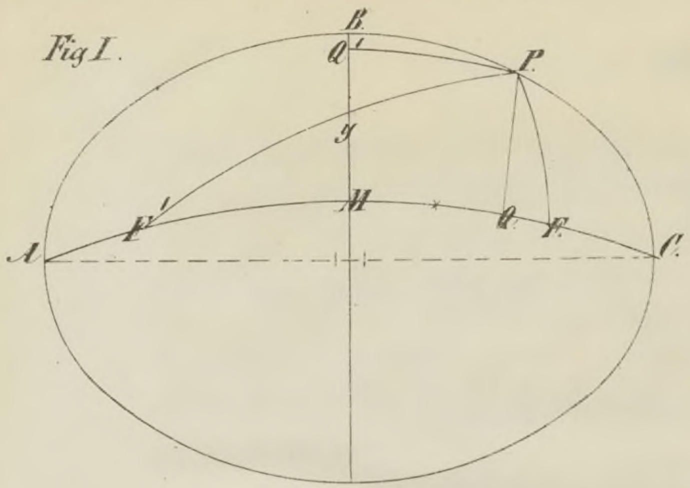


Fig III.

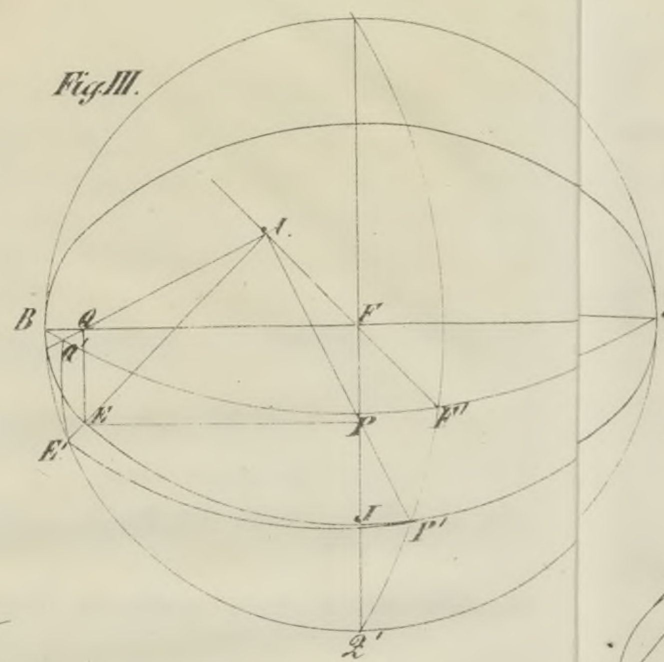


Fig II.

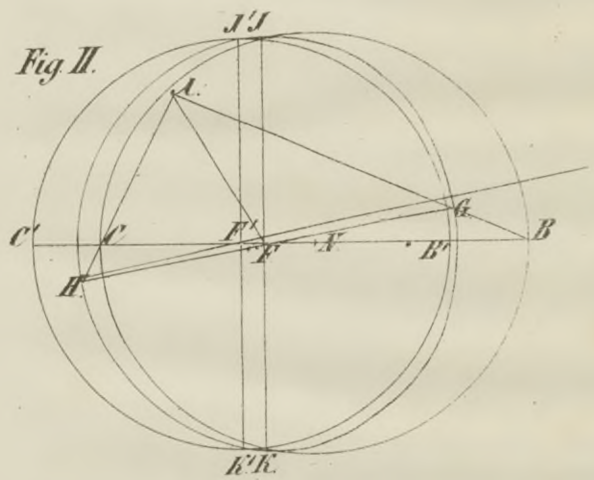


Fig. IV.

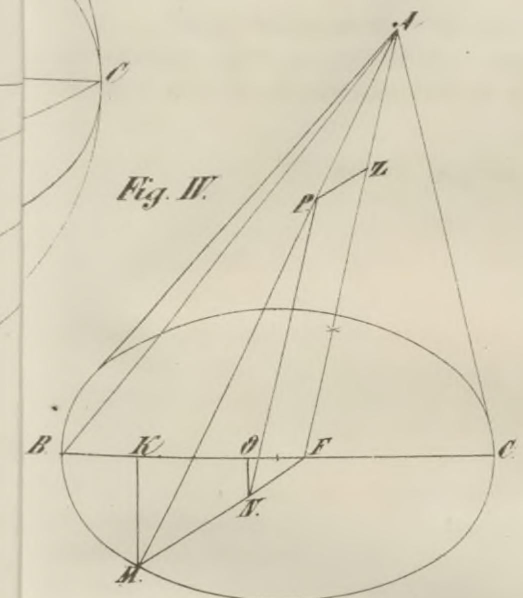


Fig. V.

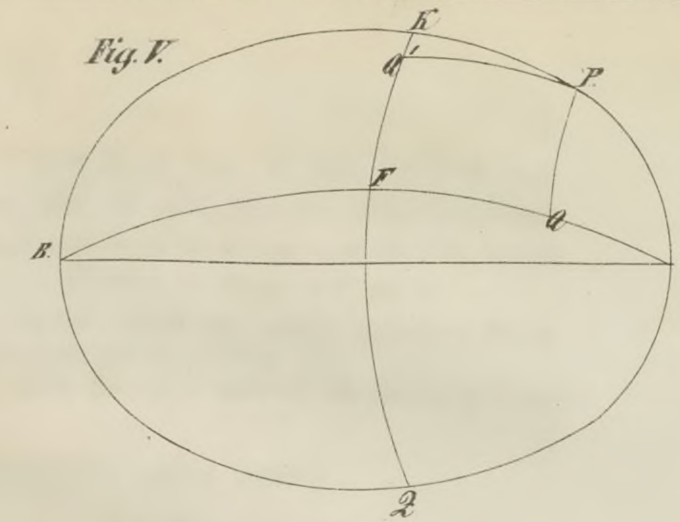


Fig VI

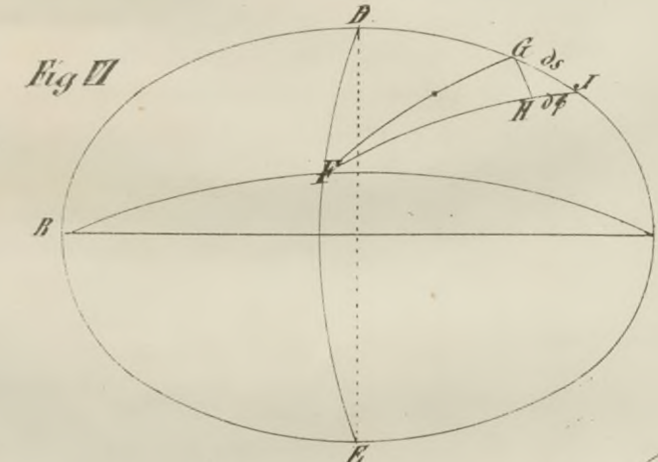
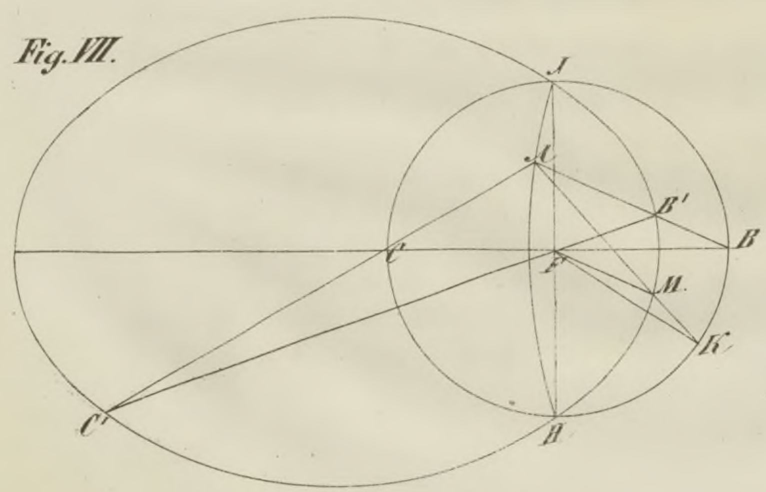
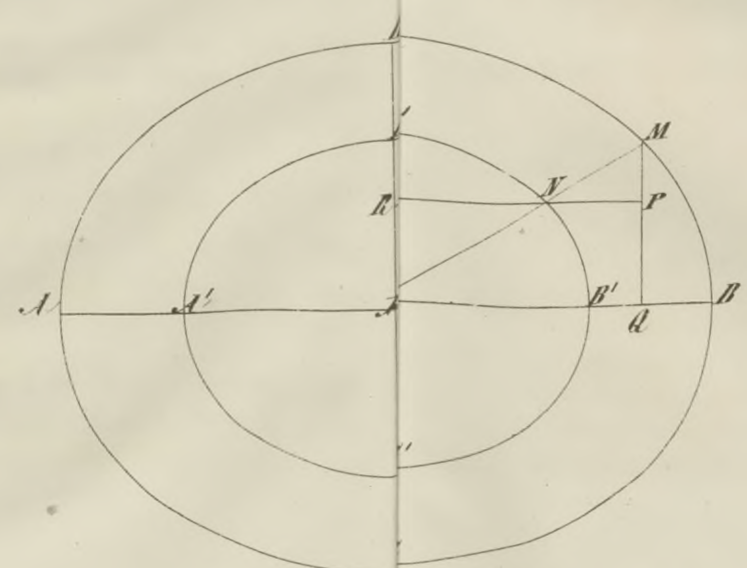
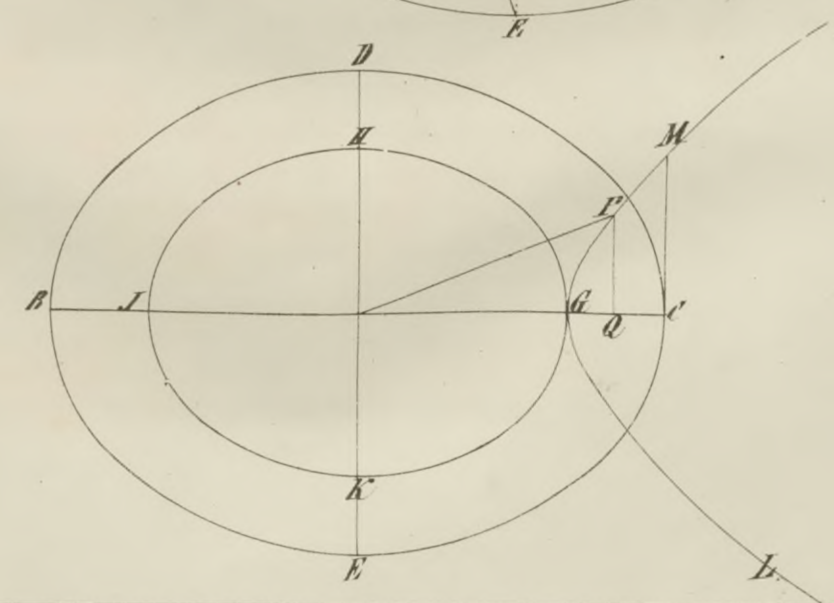


Fig. VII.







Lith. d. Gebr. Schamberg. Königsberg

Daß diese Summe der drei Producte gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, kann ich auch hier leicht nachweisen, indem ich $\beta = \frac{\pi}{2}$ setze, denn alsdann wird der vierte Theil der sphärischen Ellipse ein Kugeloctant, ist also gleich $\frac{\pi}{2}$. Da nun F (cos e, o) = E (cos e, o) = o ist, so wird

$$\frac{\pi}{2} = F^1 \sin e, E^1 \cos e + F^1 \cos e\, E^1 \sin e - F^1 \cos e\, F^1 \sin e.$$

Obiger Ausdruck für f ist nun noch, um den Inhalt der ganzen sphärischen Ellipse zu erhalten, mit 4 zu multipliciren, und dieses giebt als Endresultat

$$F = 2\pi - 4\,(E^1 \sin e - F^1 \sin e)\, F\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right) - 4\,F^1 \sin e\, E\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

(Fortsetzung folgt im Programm des nächsten Jahres.)

Schulnachrichten.

I. Lehrverfassung.

Ordinarien waren in Cl. I. Professor Klupß, in Cl. II. Professor Kühnast, in Cl. III, A. Professor Brillowski, in Cl. III, B. Gymnasiallehrer Losch im Winter, im Sommer Dr. Waas, in Cl. IV. Oberlehrer Weyl, in Cl. V. Oberlehrer Claussen, in Cl. VI. Gymnasiallehrer Jänsch.

1. Vorgetragene Lehrgegenstände.

Lateinische Sprache.

Cl. VI., 8 St. Regelmäßige Declination und Conjugation, Geschlechtsregeln, Zahlwörter, Pronomina, Comparation und Präpositionen. Wöchentlich 1 Exercitium und 1 Extemporale. Uebersetzt wurden die entsprechenden Abschnitte aus dem 1. Cursus des Lehrbuches von Ellendt. Jänsch.

Cl. V., 8 St. Wiederholung des Regelmäßigen aus der Formenlehre und Hinzufügung des Abweichenden, 2 St. Exercitien und Extemporalien, zugleich zur Einübung der einfacheren syntactischen Regeln, 2 St. Uebersetzen aus Ellendt's Lesebuch Curs. 1, Abschn. 2, № 28 — 3, 60; mit den älteren Schülern die Erzählungen von 80—180, 4 St. Claussen.

Cl. IV., 8 St. Wiederholung der Formenlehre und die Syntax der Casus Zumpt cap. 69—75 (ohne die Anmerkungen), wöchentlich 1 Exercitium. Im Winter Losch, im Sommer Director. Cornel. Nep. I—X. Im Winter Losch, im Sommer Claussen und Jänsch.

Cl. III, B., 8 St. Wiederholung der Casuslehre Zumpt cap. 69—75 (mit Hinzuziehung der Anmerkungen) und cap. 76, 77, 78, 1—5; wöchentlich 1 Exercitium, 3 St. Caes. de bell. Gall. I, 40 — V, I. 3 St. Ovid. Metamorph. VII. mit Auswahl und dabei Zumpt cap. 3 und §. 841, 842, 843. 2 St. Im Winter Losch, im Sommer Waas.

Cl. III, A., 8 St. Beendigung der Syntax Zumpt 69 — 83 incl.; wöchentlich 1 Exercitium, alle 14 Tage 1 Extemporale, 4 St. Director. Caes de bell. civil. I. und II., 2 St. Ovid. Metam. XI. und XII. mit Auswahl und aus den Trist. 10 Elegien, 2 St. Brillowski.

Cl. II., 10 St. Wiederholung und Erweiterung der Syntax und die syntax. ornat. Zumpt cap. 84 — 87; wöchentlich 1 Exercitium und Extemporalien, von Zeit zu Zeit auch eine freie Arbeit, 2 St. Cic. orat. IV. in Catil. und pro Arch. poët., de Senectute und Liv. II.; privatim Cic. epp. nach Süpfle S. 234 bis gegen das Ende, 6 St. Kühnast. Virg. Aen. VI., I. II. Im Winter Losch, im Sommer Kühnast.

Cl. I., 8 St. Wöchentlich 1 Exercitium, 1 St., Zurückgabe der Aufsätze, Extemporalien und Sprechübungen 2 St.; Cicero de orat. lib. II., de nat. deor. I. und Tacit. Germ. 3 St. Claussen. Horat. od. I. und II. 2 St. Director.

Griechische Sprache.

Cl. IV., 4 St. Regelmäßige Etymologie bis zu den Verb. contr., 2 St. Leseübungen und Uebersetzen Curs. I., IV., I. — XI., 4, 2 St. Weyl.

Cl. III, B., 6 St. Wiederholung und Ergänzung der Etymologie bis zu den unregelmäßigen Verben incl., 2 St. Lectüre Jacobs Lesebuch Curs. 2, C., a u. b; D. 3 und Einiges aus A., 4 St. Kühnast.

Cl. III, A., 6 St. Befestigung in der Etymologie, besonders Einübung der unregelmäßigen Verben; dazu wöchentlich 1 Exercitium, 2 St. Xenoph. Anab. IV., cap. 3 bis V., 2 St. Weyl. Hom. Odyss. XVIII. zur Einübung der Scansion und der Homer. Formen, 2 St. Director.

Cl. II., 6 St. Wiederholung der Formenlehre und die Hauptregeln der Syntax, namentlich syntaxis casuum und das Wichtigste über die Mod.; alle 14 Tage 1 Exercitium; Plut. Marcellus und Pelopidas, 4 St. Kühnast. Hom. Odyss. I. — XII. theils in der Klasse, theils privatim, 2 St. Director.

Cl. I., 6 St. Die erste Hälfte des syntactischen Cursus (Verbindung des Subjects und Prädicats, Syntax des Artikels und der Pronomina und der Casus); alle 14 Tage 1 Exercitium aus Corn. Nep.; Plat. Phaedr. 2te Hälfte, Crito, Eutyphr. und Theag.; privatim Herod. II. und III., 4 St. Kühnast. Hom. Il. I. — XII. theils privatim, theils in der Klasse, 2 St. Director.

Deutsche Sprache.

Cl. VI., 6 St. Lesen, Declamations- und orthographische Uebungen; Kenntniß der verschiedenen Wörterclassen und Uebung im Gebrauch derselben; die Bestandtheile des einfachen nackten Satzes; daneben kleine schriftliche Arbeiten (alle 14 Tage 1). Küsel.

Cl. V., 4 St. Lese-, Declamations- und orthographische Uebungen; die Lehre von der Erweiterung des einfachen Satzes; alle 14 Tage 1 Aufsatz. Küsel. Als Lesebuch für Cl. VI. und V. wurde benutzt Lehmann, Theil I.

Cl. IV., 3 St. Lese- und Declamationsübungen; die zusammengesetzten Sätze und Lehre von der Interpunction; alle 14 Tage 1 Aufsatz. Küsel. Zum Lesebuch diente Lehmann Theil 2, 1.

Cl. III, B., 3 St. Uebungen im Declamiren und im freien Vortrage; Anleitung zum Disponiren, verbunden mit der Lectüre aus Lehmann Theil 2, 2; Rückgabe der Aufsätze (alle 3 Wochen 1). Waas.

Cl. III, A., 3 St. Uebungen im Declamiren und im freien Vortrage; Lectüre aus Lehmann Theil 3; Rückgabe der Aufsätze (alle 3 Wochen 1). Im Winter Waas, im Sommer Brillowski.

Cl. II., 3 St. Zurückgabe der Aufsätze (alle 4 Wochen 1), verbunden mit Uebungen im Disponiren; Geschichte der deutschen Literatur von der ältesten Zeit bis zur Reformation nach Pischon und Mittheilung einzelner Proben aus Wackernagel; Lectüre der Nibelungen und der Gudrun. Waas.

Cl. I., 3 St. Literaturgeschichte nach Pischon 6ter und 7ter Zeitraum und Wiederholung des 1sten und 2ten; Lectüre der Braut von Messina, Uebungen im freien Vortrage und Zurückgabe der Aufsätze (alle 4 Wochen 1). Claussen.

Französische Sprache.

Cl. V., 2 St. Leseübungen, Lernen von Vocabeln, Einübung der Declination mit den articl. défini, indéfini und partit. und der Verb. avoir und être nach Ahn's 1 Cursus No. 1—60; schriftliche und mündliche Uebungen im Bilden kleiner Sätze. Thiem.

Cl. IV., 2 St. Fortgesetzte Leseübungen, Uebersetzen der Uebungsstücke aus Ahn bis zum Ende der 1. Abtheilung, aus dem Anhange von No. 74 — 85 und einiger Anecdoten aus Hirzel's Grammatik; Declination und Stellung der pronom. person. conj. und absol., Conjugation der regelmäßigen Verben, schriftliche und mündliche Uebungen in der Bildung von Sätzen. Thiem.

Cl. III, B., 2 St. Fortgesetzte Einübung der Conjugationen, Syntax des Artikels und Bildung des Plur. nach Hirzel's Grammatik; dazu wöchentlich ein Exercitium; Uebersetzung aus Charles XII. und zwar ausgewählte Abschnitte aus liv. II. u. IV. Weyl.

Cl. III, A., 2 St. Lernen der unregelmäßigen Verba, Syntax des Hauptworts und besonders der Pronomina nach Hirzel 3.—6. Kap. incl. mit wöchentlichen Exercitien, Charles XII., livr. 2 beendigt und 3 angefangen. Weyl.

Cl. II., 2 St. Grammatik nach Hirzel Kap. 8—17 mit wöchentlichen Exercitien. Mignet histoire de la révolution franç. intr et chap. 1 und 2. Im Winter Losch, im Sommer Weyl.

Cl. I., 2 St. Wiederholung der früheren grammatischen Pensen und Hinzufügung von Kap. 18—22; dazu wöchentlich 1 Exercitium. Sègur l'hist. de la grande armée livr. X. und Cid par Corneille. Weyl.

Hebräische Sprache.

Cl. II., 2 St. Leseübungen, Lernen der Conjugationen und einiger syntactischen Regeln, besonders über das Nomen und Lectüre aus Gesenius Lesebuch S. 1—20. Simon.

Cl. I., 2 St. Wiederholung der Formenlehre und Syntax nach Gesenius Grammatik §. 77—127; Uebersetzen aus Gesenius Lesebuch S. 21—120. Simon.

Religionslehre.

Cl. VI., 2 St. Biblische Geschichte des A. T. nach Preuß; Lernen der Gebote, der Hauptbeweisstellen und einiger Kirchenlieder. Jänsch.

Cl. V., 2 St. Biblische Geschichte des N. T. nach Preuß; Lernen des 2. Hauptstücks und der dazu gehörigen Hauptbeweisstellen. Küsel.

Cl. IV., 2 St. Lernen des 3., 4. und 5. Hauptstückes nebst Sprüchen und Liedern; Lectüre aus den 5 Büchern Moses und aus dem N. T. einige Gleichnisse. Im Winter Losch, im Sommer Küsel.

Cl. III., 2 St. Wiederholung sämmtlicher Hauptstücke und Erklärung der beiden ersten; Lectüre des Evangeliums Lucä, ausgewählter Psalmen, der Sprüche Salomonis und ausgewählter Stücke des Sirach. Brillowski.

Cl. II., 2 St. Geschichte der Erlösung der Menschheit und die Geschichte der christlichen Kirche bis zur Reformation; Lectüre des Evangeliums des Matthäus und des Briefes Jacobi in der Ursprache. Im Winter Simon, im Sommer Dreist.

Cl. I., 2 St. Die christliche Glaubenslehre; Lectüre des Römerbriefes und des Evangeliums des Johannes. Im Winter Simon, im Sommer Dreist.

Mathematik.

Cl. VI., 4 St. Rechnen. Die 4 Species in ganzen und gebrochenen, benannten und unbenannten Zahlen. Klupß.

Cl. V., 4 St. Rechnen. Nach einer Wiederholung des vorigen Pensums die 4 Species in Decimalbrüchen und Buchstaben, Wurzelziehen, Aufsuchen des gemeinschaftlichen Theilers, Regeln für das Erkennen der Factoren, Verhältnißrechnungen, Entwicklung und Berechnung der Kettenbrüche; gegen Ende des Cursus auch in 1 St. geometrische Anschauungslehre. Jänsch.

Cl. IV., 3 St. Beweise für die Bruchrechnungen, Algebra und zusammengesetzte Regel de tri; von der geraden Linie, den Parallelen, den Winkeln, Congruenz der △△; erster Abschnitt und Lehre vom Kreise; Uebungsaufgaben. Jänsch.

Cl. III, B., 3 St. Lehre von den Proportionen und den einfachen Reihen, Ausziehen der Kubikwurzeln, numerische und algebraische Gleichungen des 1. Grades; Lehre vom Kreise bis zur Anwendung und Lehre von der Aehnlichkeit der △△; das 4eck; Lehre von den Linien im △ und vom Flächenraum; Uebungsaufgaben. Jänsch.

Cl. III, A., 3 St. Aehnlichkeit der △△, vom Kreise und von der Ausmessung der Figuren; einfache Gleichungen des 2. Grades und Potenzlehre. Klupß.

Cl. II., 4 St. Wiederholung der Planimetrie und Uebungsaufgaben, Lehre von der harmonischen Theilung; Logarithmen und deren Anwendung; ebene Trigonometrie; arithmetische und geometrische Progressionen; Zinseszinsrechnung; Uebungsaufgaben aus der Arithmetik und Geometrie. Klupß.

Cl. I., 4 St. Lehre von den Transversalen; figurirte Zahlen und Progressionen höherer Ordnungen; diophantische Gleichungen; analytische Geometrie; Combinationen und deren Anwendung; Aufgaben aus den verschiedenen Theilen der Mathematik. Klupß.

Naturgeschichte und Physik.

Cl. VI., 2 St. Säugethiere und Vögel. Weyl.

Cl. V., 2 St. Fische, Amphibien und Insekten. Klupß.

Cl. IV., 2 St. Botanik. (Im Winter die Terminologie, im Sommer Erklärung von Pflanzen). Weyl.

Cl. III, B., 2 St. Mineralogie und Anthropologie. Weyl.

Cl. III, A., 2 St. Populäre Physik. Im Winter: die allgemeinen Eigenschaften der Körper; Thermometer und Barometer; Elemente der Statik; die Grundgesetze vom Licht. Jänsch. Im Sommer die Grundgesetze der Electricität, des Magnetismus und der Wärme. Klupß.

Cl. II., 2 St. Wissenschaftliche Uebersicht über das ganze Gebiet der Naturgeschichte; im Winter Meteorologie, im Sommer Mineralogie. Jänsch.

Cl. I., 2 St. Wissenschaftlicher Unterricht in der Physik. Im Winter: die allgemeinen Eigenschaften der Körper und Statik. Im Sommer: die Lehre vom Licht. Klupß.

Geschichte und Geographie.

Cl. VI., 2 St. Vorbereitender Cursus. Das Nothwendigste über Gestalt, Größe, Stellung und Bewegung der Erde; Uebersicht über Land und Meer; eine allgemeine Uebersicht über die Welttheile. Weyl.

Cl. V., 3 St. Geographie, 2 St. Uebersicht über den Zusammenhang des Weltalls und die Stellung des Erdkörpers in demselben nebst den bekanntesten daraus folgenden Erscheinungen. Ritter §. 2—6, 8—11, 25—27, 30, 32—39. Außerdem Amerika und Australien, Asien und Afrika. Ritter §. 12—15, 20—23. Waas.

Geschichte, 1 St. Eintheilung des ganzen Gebiets, Biographien der berühmtesten Männer aus den verschiedenen Zeiträumen. Waas.

Cl. IV., 4 St. Geographie, 2 St. Uebersicht über die Dimensionen des Erdkörpers; Vertheilung von Land und Wasser; Europa nach dem Gepräge seiner Oberfläche und nach der politischen Ländervertheilung. Ritter §. 6, 8—11, 16, 18, 24, 66—86. Waas.

Geschichte, 2 St. Alte Geschichte bis zum Untergang des weströmischen Reichs nach Schmidts Leitfaden. Waas.

Cl. III, B., 4 St. Geographie, 2 St. Australien, Amerika, Afrika und Asien nach Ritter §. 9—12, 13—19, 20—23, 87—109. Brillowski.

Geschichte, 2 St. Geschichte des Mittelalters, Schmidts Leitfaden pag. 29—74; daneben Wiederholung der alten Geschichte. Brillowski.

Cl. III, A., 4 St. Geographie, 2 St. Wiederholung der außereuropäischen Welttheile; Europa nach Ritter §. 16—19, 24, 66—86. Brillowski.

Geschichte, 2 St. Wiederholung der Geschichte des Mittelalters, neuere Geschichte und zwar vorzugsweise von Preußen. Schmidt pag. 74—101. Brillowski.

Cl. II., 3 St. Geographie, 1 St. Wiederholung und Vervollständigung der Geographie von Europa. Brillowski.

Geschichte, 2 St. Aelteste Staaten Asiens und Afrikas, Grichenland und Macedonien, die Römer bis zur Schlacht bei Actium nach Schmidts Grundriß, Thl. I., 1—108. Brillowski.

Cl. I., 3 St. Neue Geschichte bis 1740 nach Schmidts Grundriß, Thl. III., 1—67; Wiederholung der alten und mittleren Geschichte und der Geographie. Brillowski.

Philosophische Propädeutik.

Cl. I., 2 St. Psychologie; Repetion der Logik. Claussen.

Gesang.

3. Singklasse, 2 St. Notenlesen, rhythmische und melodische Uebungen; einstimmige Gesänge aus dem 1. Heft des Sängerhains von Erk und Greef. Küsel.

2. Singklasse, 2 St. Uebungen in den verschiedenen Dur- und Molltonarten; zwei- und dreistimmige Gesänge aus dem 1. Heft des Sängerhains von Erk und Greef und Einübung des Soprans zu größeren Chören. Küsel.

1. Singklasse, 2 St. Fortsetzung der Uebungen in Dur- und Molltönen; vierstimmige Gesänge aus dem 2. Heft des Sängerhains von Erk und Greef und Einübung des Alt zu größeren Chören. Küsel.

Außerdem wurde aus den geübtern Sängern ein Männerchor gebildet, der unter Mitwirkung von Dilettanten größere Compositionen, wie die Schöpfung und die Jahreszeiten von Haydn, vortrug.

Schreiben.

Cl. VI., 4 St.
Cl. V., 3 St. } nach eigenen Vorschriften. Thiem.

Zeichnen.

Cl. VI., 2 St. Uebung des Strichs in allen Lagen und Richtungen, Zusammenstellung von geraden und krummen Linien zu Figuren, Uebung im Schattiren. Thiem.

Cl. V., 2 St. Fortgesetzte Uebungen im Schattiren, Baumschlag, kleine Landschaften in Blei und schwarzer Kreide. Thiem.

Cl. IV., 2 St. Größere Landschaften, Theile des menschlichen Körpers und besonders Köpfe. Thiem.

Die Turnübungen leitete während der Sommermonate, wie früher, Jänsch.

II. Verfügungen der vorgesetzten Königl. Behörden.

1. Unter dem 2. October. Es sollen Schüler anderer Gymnasien zur Maturitäts-Prüfung in keinem Falle ohne vorausgegangene höhere Genehmigung zugelassen werden, wenn sie nicht mindestens seit 2 Jahren aus der II. Cl. abgegangen sind.
2. Unter dem 11. October. Die Benutzung der Leihbibliotheken durch Schüler des Gymnasiums ist zu überwachen, und es soll eingeschritten werden, wenn dieselben unsittliche Bücher ausgeben.
3. Unter dem 13. November. Nach einem Ministerial-Erlaß vom 27. October sollen die Abgangszeugnisse in der vorschriftsmäßigen Vollständigkeit ausgestellt, besonders aber die für das Fähnrichsexamen nöthigen Zeugnisse ausführlich und ganz nach der Cirkular-Verfügung vom 18. April 1845 gegeben werden.
4. Unter dem 20. December. Die Zeugnisse der Reife für Abiturienten sollen ohne alle Zusätze, die verschiedener Deutung fähig sind, wie fast, ziemlich ꝛc. gefaßt werden.
5. Unter dem 17. Januar. Auf Veranlassung des vorgesetzten Ministeriums wird bestimmt, daß Primanern, welche im Disciplinar-Wege von einem Gymnasium entfernt sind, oder welche zur Umgehung einer Schulstrafe oder aus andern ungerechtfertigten Gründen ihre bisherige Schule verlassen haben, dasjenige Semester, in welchem der Wechsel eingetreten ist, auf ihren 2jährigen Prima-Cursus nicht angerechnet werden soll, mögen sie sich nun als Abiturienten oder als Extraneer zur Maturitätsprüfung für die Universitätsstudien melden.
6. Unter dem 9. Februar. Ausländische Candidaten sollen ohne höhere Genehmigung zur Abhaltung des pädagogischen Probejahres nicht zugelassen werden.

III. Chronik der Lehranstalt.

A. Lehrerpersonal.

1. Das Schuljahr ist nicht ohne längere Unterbrechungen in dem regelmäßigen Gange des Unterrichts und ohne schmerzliche Verluste für uns abgelaufen. Zuerst erhielt der Predigtamts-Candidat Simon einen 6monatlichen Urlaub vom 1. October bis 1. April. Er wurde während dieser Zeit zum Theil durch den Dr. Waas vertreten, der mit Eifer und Erfolg das Deutsche in Cl. II. und III. und die Geschichte und Geographie in den untern und mittlern Klassen übernahm; und als am Anfange des Sommersemesters die städtischen Behörden in das erledigte Rectorat der Stadtschule den durch eine 5jährige Thätigkeit am Gymnasium bewährten Candidaten Simon beriefen, wurde Dr. Waas aufs Neue mit der einstweiligen Verwaltung der dadurch erledigten Hülfslehrerstelle beauftragt, soweit sie philologische Disciplinen umfaßt; den Religionsunterricht in Cl. I. und II. übernahm vorläufig der Superintendent Dreist, dem sich die Anstalt für seine entgegenkommende und uneigennützige Thätigkeit zum wärmsten Dank verpflichtet fühlt.

Auch der Rector Simon blieb noch einstweilen mit uns in Verbindung, indem er mit anerkennenswerther Bereitwilligkeit die Ertheilung des hebräischen Unterrichts beibehielt.

Inzwischen hatte schon seit den ersten Tagen des März eine Anfangs nicht gefährlich scheinende Kränklichkeit den Gymnasiallehrer Losch von der Verwaltung seines Amtes fern gehalten; ernstlichere Befürchtungen um ihn mußten in Schülern und Lehrern rege werden, als seine Körperkräfte mit dem Eintritt der schöneren Jahreszeit sichtlich zu schwinden begannen, und als selbst der Aufenthalt unter den Bäumen und Blumen, für die er sonst mit Liebe gesorgt hatte, ihm keine Erfrischung mehr bringen konnte. Seinen langen Leiden erlag er am 14. Juli trotz der treuesten und aufopferndsten Pflege in der Mitte der Hundstagsferien und wurde am 17. gegen Abend von zahlreichen Freunden und den anwesenden Schülern und Collegen zur Ruhe bestattet.

Carl Ludwig Losch, geb. den 6. Juni 1810 zu Rastenburg, wurde auf dem Gymnasium seiner Vaterstadt gebildet, studirte seit 1829 auf der Universität zu Königsberg Philologie, wurde nach Abhaltung des gesetzlichen Probejahres zu Marienwerder als Hülfslehrer beschäftigt, trat im October 1842 hier ein und bekleidete zuletzt die 6. ordentliche Lehrerstelle. In weiteren Kreisen ist er durch die Abhandlung zum Programm von 1845 de perfecti temporis et plusquamperfecti formis homericis bekannt geworden; als Mensch und College, als Lehrer und Erzieher wurde er nach seinem ganzen Werthe in dem engern Kreise erkannt, in dem er zum Segen der Anstalt, die ihn selbst gebildet hatte, thätig sein konnte. Trotz der steigenden Krankheitsschmerzen wußte er sich Muth und Kraft für sein Amt bis in die letzten Monate zu erhalten, in Hingebung, und Treue für Lehrer und Schüler ein nachahmungswerthes Muster. — Sanft ruhe seine Asche!

2. Auch in dem verflossenen Schuljahr hat das Lehrercollegium mehrfache Beweise wohlwollender Fürsorge von den vorgesetzten Königl. Behörden erhalten. Nicht allein aus dem Fonds von 20,000 Rℓ, welcher der Staatsregierung zur Verbesserung schlecht dotirter Gymnasiallehrerstellen überwiesen ist, haben 5 Lehrer des hiesigen Gymnasiums nicht unerhebliche Zuschüsse empfangen, sondern es wurden auch nach dem Abschluß der Jahresrechnung ältere Bestände für einige andere Stellen zu demselben Zweck verwandt.

B. Lehrapparat.

1. Der Gymnasial-Bibliothek wurden durch die Güte der vorgesetzten Behörden außer den Fortsetzungen der Zeitschrift für deutsches Alterthum von Moritz Haupt und der neuen Preuß. Provinzialblätter manche andere Geschenke zu Theil. So die zweite Lieferung des von der Alterthumsgesellschaft Prussia herausgegebenen zweiten Theils der Literärgeschichte von Pisanski, für die Schülerbibliothek die Uebersetzung des Macbeth von Dr. Jacob. Eine beträchtlichere Vermehrung verdankt die Bibliothek ihrem bisherigen Bibliothekar. Durch den verstorbenen Gymnasiallehrer Losch, der manche Mußestunde der Aufstellung unseres Büchervorrathes in dem neuen Bibliothekzimmer gewidmet hat,

ist nämlich seine eigene Büchersammlung dem Gymnasium vermacht worden. So schätzbarer Zuwachs an philologischen und historischen Werken uns dadurch auch zu Theil wird, so wissen wir doch mehr noch die Gesinnung zu ehren, von der uns auch diese Gabe den Beweis giebt; durch sie wird das geistige Band zwischen dem Verstorbenen und der Anstalt fort und fort erhalten werden.

2. Der physikalische Apparat wurde durch die Anschaffung eines vom Lehrer Wetzel zu Berlin construirten Telluriums und Planetariums bereichert. Außerdem erhielt das Gymnasium von Herrn Thierarzt Kuhrt hierselbst eine beträchtliche Anzahl sehr gut erhaltener ausgestopfter Vögel und von Herrn v. Freyhold auf Kl. Gehland eine Anzahl alter Münzen und den Abguß eines Mumienmodells zum Geschenk. Beiden Herren sagt der Director den verbindlichsten Dank für ihre gütigen Spenden.

3. Die Lehrer- und Schülerbibliothek wurden aus dem etatsmäßigen Fonds vermehrt. Namentlich konnten für den geographischen Unterricht wieder mehrere Wandcharten angeschafft werden.

C. Unterstützungsfonds.

1. Das Königl. Stipendium erhielten die Primaner Mannich, Thomaschewski, Preuß — Sorquitten, Raabe, Lewin, Warda, Pohl und Sterz; die Secundaner Gers I. — Sehesten, Küsel, Wilimzig II., v. Hermann, Majewski, Nawitzki, Davidsohn, Kaminski und Kasper; die Tertianer Gers II. — Sehesten, Gers — Stürlack, Batz, v. Freyhold I. und Gärtner.

2. Die Schrengenschen (v. Gröbenschen) Stipendien, welche beide zur Erledigung kamen, wurden durch die Herren Collatoren an die Primaner Pohl und Küsel bis zur Beendigung ihrer akademischen Studien verliehen.

3. Das Krügersche Stipendium, dem in diesem Jahre keine außergewöhnlichen Einnahmen zu Theil wurden, ist durch Ansammlung der Zinsen auf einen Bestand von 175 Rthlr. in Staatspapieren und 13 Rthlr. 24 Sgr. 2 Pf. bei der Rastenburger Sparkasse gestiegen, bisher also nach der Bestimmung der Stifter noch nicht ins Leben getreten.

4. Die Bibliothek von Schulbüchern für diejenigen Schüler, denen die Anschaffung aus eigenen Mitteln zu schwer fällt, hat auch in diesem Jahr aus den etatsmäßig dafür bestimmten Einnahmen einige neue Bücher erhalten. Besondern Dank verdient sich der Herr Buchhändler Röhricht, der mit der unentgeltlichen Ueberweisung von brauchbaren Exemplaren fortfährt. In dem Bewußtsein, fleißigen Schülern ihre Ausbildung erleichtert zu haben, wird er den schönsten Lohn seiner uneigennützigen Handlungsweise finden.

D. Abiturienten.

Zu Michaelis fiel die Prüfung aus; Ostern 1852 verließen die Anstalt mit dem Zeugniß der Reife:

1. Heinrich Gustav Raabe, evangel., 22 J. alt, aus Braunsberg, Sohn des hiesigen Steuer-

Controlleurs, $10\frac{1}{4}$ J. auf dem Gymnasium, $2\frac{1}{2}$ J. in Prima, studirt in Königsberg Jura.

2. Heinrich Jakob Immanuel Gemmel, evangel., $17\frac{3}{4}$ J. alt, aus Leunenburg bei Schippenbeil, Sohn des dortigen Pfarrers, $8\frac{3}{4}$ J. auf dem Gymnasium, $2\frac{1}{2}$ J. in Prima, studirt in Königsberg und Berlin Jura und Kameralia.
3. Karl Gustav Sterz, evangel., $18\frac{1}{2}$ J. alt, aus Rastenburg, Sohn des verstorbenen Büchsenmachers und Gastwirths, $8\frac{1}{2}$ J. auf dem Gymnasium, $2\frac{1}{2}$ J. in Prima, studirt in Königsberg Theologie.
4. Otto Hermann Büttner, evangel., 20 J. alt, aus Goldapp, Sohn des Kreisgerichtsrathes in Insterburg, $4\frac{1}{2}$ J. auf dem Gymnasium, $2\frac{1}{2}$ J. in Prima, studirt in Königsberg Jura.
5. Joseph Bönigk, katholisch, $21\frac{3}{4}$ J. alt, aus Wormditt, Sohn des dortigen Schmiedemeisters, $\frac{1}{2}$ J. auf dem Gymnasium (vorher 8 J. in Braunsberg), $\frac{1}{2}$ J. in Prima (vorher 2 J. in Braunsberg), studirt in Königsberg Medicin.
6. Simon Heilbronn, jüdisch, $19\frac{1}{2}$ J. alt, aus Rössel, Sohn des verstorbenen Kaufmanns daselbst, 4 J. auf dem Gymnasium, 2 J. in Prima, studirt in Königsberg Jura.
7. Otto Rudolph Karl Jester, evangel., 22 J. alt, aus Heilsberg, Sohn des Landbau-Inspectors zu Heilsberg, $11\frac{1}{2}$ J. auf dem Gymnasium, 2 J. in Prima, studirt in Königsberg Jura.
8. Hermann August Gramberg, evangel., 19 J. alt, aus Gerdauen, Sohn des dortigen Färbereibesitzers, 3 J. auf dem Gymnasium, $1\frac{1}{4}$ J. in Prima (vorher $\frac{3}{4}$ J. auf dem Fridericianum in Königsberg), studirt in Königsberg Jura.

E. Schulfeierlichkeiten.

1. Am 15. Oktober wurde der Geburtstag Sr. Majestät des Königs feierlich begangen. Die Festrede hielt der Gymnasiallehrer Losch über die Verdienste der Hohenzollern und des von ihnen gegründeten preuß. Staates um die Ausbreitung und Befestigung christlicher und deutscher Bildung im Nordosten von Europa. Angemessene patriotische Gesänge, namentlich der Doppelchor von F. Schneider „Jehovah, Dir frohlockt der König" und die Cantate von Franz Weber „Heil dem König!", eröffneten und schlossen unter Leitung des Cantor Küsel die Feierlichkeit.
2. Am Charfreitag hielt gemäß der Hippelschen Stiftung der Director einen Vortrag, worin er darlegte, zu welchen Gesinnungen gegen Jesum Christum eine ernste Betrachtung seines Todes erwecken müsse. Ein einleitendes, auf die Feier vorbereitendes Gedicht trug der Secundaner Majewski vor, der Primaner v. Groddeck zum Schluß einen Abschnitt aus dem 5. Buch des Messias von Klopstock.
3. Am 5. April wurden die Abiturienten feierlich durch den Director entlassen, nachdem einer derselben, Sterz, in einer lateinischen Rede (artium liberalium laudes) von seinen

bisherigen Mitschülern und Lehrern Abschied genommen, und der Primaner Preuß — Ortelsburg in einem deutschen Vortrage (über die Tugenden des heidnischen Alterthums) den Scheidenden seine Wünsche für ihre Zukunft ausgesprochen hatte. Auch aus den andern Klassen hatten sich Schüler mit dem Vortrage von Gedichten versucht; ihre Leistungen und die von dem Sängerchor vorgetragenen Lieder fanden bei den zahlreich versammelten Zuhörern Beifall. Zum ersten Male war bei dieser Gelegenheit der Saal mit den 6 Büsten geschmückt, die des Königs Majestät Allergnädigst geschenkt haben. An den beiden Seiten des Katheders stehen die des Herzog Albrecht und Friedrich Wilhelm des III. der Begründer dieser Anstalt; neben ihnen die Sr. Majestät des regierenden Königs und Sr. Königl. Hoheit des Prinzen von Preußen; an der andern Seite die Friedrichs des Großen und König Friedrich des I. Noch oft werden sie das Auge der Betrachtenden erfreuen und alsdann den geistigen Blick hinlenken auf die Förderung aller edleren Bestrebungen, die das Vaterland seinen Fürsten verdankt.

4. Am 19. Mai wurde der hippelschen Stiftung gemäß der herkömmliche Schulactus gehalten. Der Primaner Brzoska hielt einen geschichtlichen Vortrag „über die Napoleoniden," und aus den andern Klassen declamirten 15 Schüler deutsche und französische Gedichte; zum Schluß sprach der Oberlehrer Claussen über die Lyrik der Gegenwart.
5. Am 23. Mai gingen die Lehrer mit den eingesegneten Schülern zum heiligen Abendmahl.
6. Der 24. Mai wurde der Anstalt durch einen Besuch Sr. Excellenz des Herrn Oberpräsidenten Eichmann zu einem Festtage. Nach einer genauen Besichtigung der Klassen und aller andern Räumlichkeiten, von denen besonders der neue Hörsaal Beifall fand, so wie der Sammlungen und des Turnplatzes richtete Se. Excellenz an das versammelte Lehrer-Collegium Worte der Anerkennung und Aufmunterung, die demselben stets unvergessen bleiben werden.
7. Am 21. August beging die Anstalt eine Gedächtnißfeier für den verstorbenen Gymnasiallehrer Losch. Schüler und Lehrer versammelten sich Vormittags um 9 Uhr in dem Hörsaal und vergegenwärtigten sich durch den Vortrag des Professor Brillowski das treue und segensreiche Wirken des Abgeschiedenen, den die Mehrzahl von ihnen, durch die Ferien in die Ferne geführt, nicht zu seiner Ruhestätte hatte begleiten können.
8. Von den besten Sängern wurden unter Mitwirkung von Dilettanten im Wintersemester „die Schöpfung" und im Sommer „die Jahreszeiten" von Haydn aufgeführt. Die umsichtige Leitung des Cantor Küsel und der große Fleiß, mit dem diese klassischen Meisterwerke geübt worden waren, bereiteten den Musikfreunden der Stadt und Umgegend hohen Genuß und gaben den Schülern des Gymnasiums eine sichtbare Anregung.

IV. Uebersicht der statistischen Verhältnisse.

A. Lehrer-Collegium und Unterrichtsstunden.

1. G. F. E. Techow, Director. Griechisch in Cl. I. 2 St., in II. 2 St., in III, A. 2 St.; Latein in I. 2 St., in III, A. 4 St., im Ganzen 12 St.

2. J. M. Klupß, Professor. Mathematik in Cl. I. 4 St., in II. 4 St. in III, A. 3 St.; Physik in I. 2 St.; Naturgeschichte in V. 2 St., in VI. Rechen 4 St.; im Ganzen 19 St.
3. A. G. J. Brillowski, Professor. Geschichte und Geographie in Cl. I. 3 St., in II. 3 St., in III, A. 4 St., in III, B. 4 St.; Latein in III, A. 4 St.; Deutsch in III, A. 3 St.; im Ganzen 21 St.
4. E. F. Weyl, Oberlehrer. Französisch in Cl. I. 2 St., in III, A. 2 St., in III, B. 2 St.; Griechisch in III, A. 4 St., in IV. 4 St.; Naturgeschichte in III, B. 2 St., in IV. 2 St., in VI. 2 St.; Geographie in VI. 2 St.; im Ganzen 22 St.
5. F. L. Kühnast, Professor. Griechisch in Cl. I. 4 St., in II. 4 St., in III, B. 6 St.; Latein in II. 8 St.; im Ganzen 22 St.
6. C. W. Claussen, Oberlehrer. Latein in Cl. I. 6 St., in V. 8 St.; Deutsch in I. 3 St.; philosophische Propädeutik in I. 2 St.; im Ganzen 19 St.
7. Vac. Latein in Cl. II. 2 St., in III, B. 8 St., in IV. 8 St.; Französisch in II. 2 St.; Religion in IV. 2 St.; im Ganzen 22 St.
8. C. R. Jänsch. Mathematik in Cl. III, B. 3 St., in IV. 3 St., in V. 4 St.; Naturgeschichte in II. 2 St.; Physik in III, A. 2 St.; Latein in VI. 8 St.; Religion in VI. 2 St.; im Ganzen 24 St.
9. Vac. Deutsch in Cl. II. 3 St., in III, B. 3 St.; Geschichte und Geographie in IV. 4 St., in V. 3 St.; Religion in I. 2 St., in II. 2 St., in III. 2 St.; Hebräisch in I. 2 St., in II. 2 St.; im Ganzen 23 St.
10. L. F. C. Küsel, Cantor. Gesang 6 St.; Deutsch in Cl. IV. 3 St., in V. 4 St., in VI. 6 St.; Religion in V. 2 St.; im Ganzen 21 St.
11. C. E. Thiem. Französisch in Cl. IV. 2 St., in V. 2 St.; Zeichnen in IV. 2 St., in V. 2 St., in VI. 2 St.; Schreiben in V. 3 St., in VI. 4 St.; im Ganzen 17 St.

B. Schülerzahl.

Am Schluß des Sommersemesters besuchten das Gymnasium in Cl. I. 31, in II. 42, in III. 59, in IV. 39, in V 38, in VI. 22, im Ganzen 231 Schüler.

Durch den Tod verloren wir leider 3 hoffnungsvolle Zöglinge, 1 aus Cl. II., 2 aus III, B.

Die öffentliche Prüfung der sämmtlichen Klassen findet den 1. October Vormittags von 8½ — 12 Uhr Statt, und Nachmittags wird das Sommersemester mit Declamationsübungen und der Abiturienten-Entlassung geschlossen.

Das Wintersemester beginnt Montag, den 11. October.

Zur Aufnahme neuer Schüler ist der Unterzeichnete während der Ferien täglich bereit.

Techow.

Reihenfolge der Prüfung und der Declamationsübungen.

Vormittags 8½ Uhr:
Sexta: Lateinisch. Jänsch.
Quinta: Geographie. Waas.
Quarta: Deutsch. Küsel.
Tertia: Geschichte und Geographie. Brillowski.
Secunda: Lateinisch. Kühnast
Prima: Mathematik. Klupß.

Nachmittags $2^1/_2$ Uhr:

Es declamiren:

Die Sextaner:

v. Losch. Die Stufenleiter v. Pfeffel.
Gisevius. Der Zeisig v. Gellert.
Reinert. Die Fliegen v. Willamow.
v. Sanden. Der Hahn und der Fuchs. v. Hagedorn.

Die Quintaner:

Thiel. Die beiden Bauern v. Pfeffel.
Kreutz. Die Gemse und die Ziege v. Gleim.
Prin. Das Schachbrett v. Pfeffel.

Die Quartaner:

Kowalski. Der Sonnenzeiger und die Glokkenuhr v. Nicolai.
Kuß. Karl V. im Kloster v. Pfeffel.
Pieau. Der Traumdeuter v. Castelli.
Olias. Die Stunden des Tages v. Michaelis.

Die Tertianer:

Leonhardy II. Elegie in den Ruinen eines Bergschlosses v. Matthisson.
Sommer. Der Eislauf v. demselben Verfasser.
v. Freyhold I. les hirondelles par Béranger.
v. Freyhold II. Der Ueberfall im Wildbad v. Uhland.
Schlick. Monolog aus der Jungfrau von Orleans.

Die Secundaner:

Leonhardy I. Kanaris aus den Griechenliedern v. Chamisso.
Techow II. Gudruns Leiden aus dem Gudrunliede.
Gudowius I. Die Verkündigung aus demselben.

Zwischen den einzelnen Abtheilungen werden die Quintaner und Sextaner kleine Gesänge vortragen. Dann folgt:

Dankchor. Musik von Kuhlau.

Preis dem Vater alles Schönen,
Alles Guten, aller Huld.
Laßt das Lied des Jubels tönen,
Ewig währet seine Huld.
Wie des Aethers goldene Sphären,
Tönen alle Herzen gleich;
Alle sollen sich verklären
In des Friedens heil'gem Reich.

Der Primaner Kaminski: Les adieux de l'école par Lamartine.

Abschiedsrede des Abiturienten Preuß: Non scholae, sed vitae discimus.

Ihm antwortet der Primaner Rübsamen in einer deutschen Rede: über die segensreichen Wirkungen von Kunst und Wissenschaft (nach einer Xenie von Göthe)

Entlassung des Abiturienten durch den Director.

Schlußchor. Abschiedslied (Volksweise.)

1. Du gehst aus unserm Kreise,
Es löst sich unser Band;
Wir wünschen frohe Reise
Und drücken Dir die Hand.
Du suchst auf andern Wegen
Dein Wohlsein und dein Glück;
So leucht' es Dir entgegen,
Wie Frühlings Sonnenblick.

2. Die weite Welt ist offen
Für jeden, der da strebt;
Du darfst das Beste hoffen,
Wenn Ed'les Dich belebt.
Was wir in Dir besessen,
Macht uns die Trennung schwer;
Wir werden's nie vergessen,
Und zögst Du über's Meer.

3. Das Schicksal mag Dich treiben
Auf wechselvoller Bahn;
Wir Freunde alle bleiben
Dir immer zugethan.
Wir schau'n in alle Fernen
Dir nach mit trübem Blick
Und flehen zu den Sternen:
Führt ihn zu wahrem Glück.